**Задача 1**

В стране Курляндии *m* футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в другую страну на ответственный матч. Самолет сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по *m* пассажиров. Еще один футболист прилетел к месту предстоящего матча на вертолете. Докажите, что хотя бы одна команда была целиком доставлена в другую страну.

**Решение:**

Так как перевезено всего 10*m* + 1 футболистов, то, рассадив по клеткам-командам, получаем, что в какой-то клетке сидит 11 футболистов.

**Задача 2**

Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.

**Решение:**

Различных разностей может быть 14 - от 1 до 14 - это те 14 клеток, в которые мы будем сажать кроликов. Кто же будет нашими кроликами? Ими, конечно, должны быть разности между парами данных нам натуральных чисел. Однако имеется 28 пар и их можно рассадить по 14 клеткам так, что в каждой клетке будет сидеть ровно два "кролика" (и значит, в каждой меньше трех). Здесь надо использовать дополнительное соображение: в клетке с номером 14 может сидеть не более одного кролика, ведь число 14 можно записать как разность двух натуральных чисел, не превосходящих 15, лишь одним способом: 14 = 15 - 1. Значит, в оставшихся 13 клетках сидят не менее 27 кроликов, и применение обобщенного принципа Дирихле дает нам желаемый результат.

**Задача 3**

Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

**Решение:**

Ответ: 16 королей. Разобьём доску на 16 квадратиков, в каждом может быть не более одного короля.

**Задача 4**

Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

**Решение:**

Если 3*m* и 3*n* - степени тройки, дающие один и тот же остаток при делении на 1000, то 3*m* - 3*n* = 3*n*(3*m-n* - 1) делится на 1000 (мы считаем для определенности, что *m* > *n*).

**Задача 5**

Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

**Решение:**

Вариантов числа знакомых всего 5: от 0 до 4. Осталось заметить, что если у кого-то 4 знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых.

**Задача 6**

Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

**Решение:**

У данного человека среди остальных пяти есть либо не менее трех знакомых, либо не менее трех незнакомых ему. Разберем, например, первый случай. Среди этих трех людей есть либо двое знакомых - тогда они вместе с выбранным нами исходно человеком образуют нужную тройку, либо они все трое попарно незнакомы.

**Задача 7**

В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

**Решение:**

Разобьем наш квадрат на 25 квадратов со стороной 20 см. По обобщенному принципу Дирихле, в какой-то из них попадет по крайней мере три точки из 51 брошенной.

**Задача 8**

11 пионеров занимаются в пяти кружках дома культуры. Докажите, что найдутся два пионера А и В такие, что все кружки, которые посещает А, посещает и В.

**Решение:**

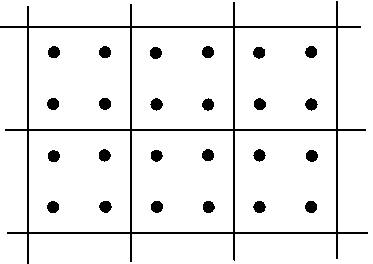
Занумеруем кружки числами от 1 до 5 и вместо каждого пионера будем рассматривать тот набор кружков - подмножество множества {1, 2, 3, 4, 5} - который состоит из посещаемых им кружков. Осталось разбить 32 подмножества указанного множества на 10 наборов так, чтобы в каждом из наборов из любых двух множеств этого набора одно содержалось в другом. В качестве таких наборов рассмотрим следующие: [∅, {1}, {1,2}, {1,2,3}, {1,2,3,4}, {1,2,3,4,5}], [{2}, {2,5}, {1,2,5}, {1,2,3,5}], [{3}, {1,3}, {1,3,4}, {1,3,4,5}], [{4}, {1,4}, {1,2,4}, {1,2,4,5}], [{5}, {1,5}, {1,3,5}], [{2,4}, {2,4,5}, {2,3,4,5}], [{3,4}, {3,4,5}], [{3,5}, {2,3,5}], [{4,5}, {1,4,5}], [{2,3}, {2,3,4}].

### Задача 1

В парке растет 10000 деревьев, посаженных квадратно-гнездовым способом (100 рядов по 100 деревьев). Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими.)

### Решение:

Разобьем деревья на 2500 четверок, как показано на рис. В каждой такой четверке нельзя срубить более одного дерева. С другой стороны, можно срубить все деревья, растущие в левых верхних углах квадратов, образованных нашими четверками деревьев. Поэтому наибольшее число деревьев, которые можно срубить, равно 2500. 



### Задача 2

Доказать, что сумма цифр числа *K* не более чем в 8 раз превосходит сумму цифр числа 8*K*.

### Решение:

Пусть *S*(*N*) — сумма цифр числа *N*. Сначала заметим, что *S*(8.125) = *S*(1000) = 1. Нам будут нужны следующие свойства функции *S*(*N*):   
1o.   *S*(*A* + *B*) ≤ *S*(*A*) + *S*(*B*);   
2o.   *S*(*A*1 + *A*2 + ... + *A*n) ≤ *S*(*A*1) + *S*(*A*2) + ... + *S*(*A*n);   
3o.   *S*(*nA*) ≤ *nS*(*A*);   
4o.   *S*(*AB*) ≤ *S*(*A*)*S*(*B*);   
Чтобы убедиться в справедливости свойства 1o, достаточно представить себе, что числа *A* и *B* складываются "столбиком". Свойство 2o получается из 1o простой индукцией. 3o — частный случай 2o. Если представить себе, что *A* умножается на *B* "столбиком" и к каждой цифре числа В применить 3o, то получится 4o.   
Теперь легко доказать требуемое неравенство: *S*(*N*) = *S*(1000*N*) = *S*(125 · 8*N*) ≤ *S*(125)*S*(8*N*) = 8*S*(8*N*), то есть

$\displaystyle {\frac{S(8N)}{S(N)}}$ ≥ $\displaystyle {\textstyle\frac{1}{8}}$,

что и доказывает утверждение задачи.

То же рассуждение годится для любого числа *k* = 2r5q. Обозначим через *c*k число $ {\frac{1}{S(2^q5^r)}}$. Докажем, что для любого *N* $ {\frac{S(kN)}{S(N)}}$ ≥ *c*k (при *N* = 2q5r это неравенство превращается в равенство, поскольку *S*(*kN*) =*S*(10r + q) = 1). Для любого *N*   *S*(*N*) = *S*(10r + q*N*) ≤ *S*(2q5r)*S*(*kN*) = $ {\frac{1}{c_k}}$*S*(*kN*), что и требовалось доказать.